教师资格考试标准预测试卷
数学学科知识与教学能力（高级中学）
卷（六）~（十）

（科目代码:404）

目 录

教师资格考试数学学科知识与教学能力（高级中学）标准预测试卷（六）

注意事项：

1. 考试时间为 120 分钟，满分为 150 分。
2. 请按规定在答题卡上填涂、作答。在试卷上作答无效，不予评分。

一、单项选择题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分）

1. 已知方程组 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \lambda \end{bmatrix}$ 有无穷多解，则有（　　）。

A. $\lambda = 0$　　B. $\lambda = 1$

C. $\lambda = -1$　　D. $\lambda \neq 1$

2. 设 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1-\cos x}{\sqrt{x}}, & x>0, \\ x^2 g(x), & x \leqslant 0, \end{cases}$ 其中 $g(x)$ 是有界函数，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处（　　）。

A. 极限不存在

B. 极限存在但不连续

C. 连续，但不可导

D. 可导

3. 将 yOz 平面上的曲线 $z=e^y\ (y>0)$ 绕 z 轴旋转一周，所得的旋转曲面方程是（　　）。

A. $\sqrt{y^2+z^2}=e$　　B. $y^2+z^2=e^x$

C. $z=e^{x^2+y^2}$　　D. $z=e^{\sqrt{x^2+y^2}}$

4. 已知三维向量空间的一组基为 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,0)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,1)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(0,1,1)$，则向量 $\boldsymbol{\beta}=(2,0,0)$ 在此基底下的坐标是（　　）。

A. $(2,0,0)$　　B. $(1,1,-1)$

C. $(1,0,-1)$　　D. $(0,0,0)$

5. 已知曲面方程为 $x^2+y^2+z^2-2x+8y+6z=10$，则过点 $(5,-2,1)$ 的切平面方程为（　　）。

A. $2x+y+2z=0$　　B. $2x+y+2z=10$

C. $x-2y+6z=15$　　D. $x-2y+6z=0$

6. 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)$，则 $Y=2X+1$ 的分布函数为(　　)。

A. $G(y)=2F(y)+1$

B. $G(y)=F\left(\frac{1}{2}y+1\right)$

C. $G(y)=\frac{1}{2}F(y)-\frac{1}{2}$

D. $G(y)=F\left(\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}\right)$

7. 下面不属于《普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订)》提出的课程基本理念的是(　　)。

A. 学生发展为本，立德树人，提升素养

B. 优化课程结构，突出主线，精选内容

C. 重视过程评价，聚焦素养，提高质量

D. 把握学生特点，启发服考，创新教学

8. 巧妙而简洁地证明了存在某种不能用开方运算求解方程的方法，同时还提出了一个代数方程能用根式求解的判定定理的数学家是(　　)。

A. 拉格朗日

B. 伽罗瓦

C. 费拉里

D. 达尔卡诺

二、简答题(本大题共 5 小题，每小题 7 分，共 35 分)

9. 已知矩阵 $\boldsymbol{B}=(1,2,3)$，$\boldsymbol{C}=\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)$，设 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}$，求 $\boldsymbol{A}^{n}$。

10. 求由曲线 $y=3-x^{2}$ 和直线 $y=1-x$ 所围的平面图形的面积 S。

11. 袋中有 50 个乒乓球,其中 20 个黄球,30 个白球,今有两人依次随机地从袋中各取一个球,取后不放回。

(1) 求第二个人取得黄球的概率;

(2) 已知第二个人取得的是黄球,求第一个人也取得是黄球的概率。

12. 简述《普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订)》有关教师实施课程标准时应注意的几个问题。

13. 数学教学要体现课程改革的基本理念,请谈谈在教学中应该把握好哪几个方面的问题。

三、解答题(本大题1小题,10分)

14. 设 A,B 为随机事件,$P(A)=0.6,P(B)=0.7$。

(1) 在什么条件下 $P(AB)$ 取得最大值,最大值是多少?

(2) 在什么条件下 $P(AB)$ 取得最小值,最小值是多少?

四、论述题(本大题1小题,15分)

15. 举例说明在教学中如何处理“预设”与“生成”的关系。

五、案例分析题(本大题 1 小题,20 分)

16. 案例:

下面提供的案例是教师 A 和教师 B 在《等比数列的前 n 项和》教学中的教学设计。

教学环节	教师 A	教师 B
引入新课	1. 复习回顾等差数列的前 n 项和及其推导过程; 2. 引入例题,让学生自主思考,初步感知错位相减法	直接引入,通过例题,创设情境,激起学生的学习兴趣
新知学习	结合例题演示等比数列的推导过程,并让学生参与其中(错位相减法),明确等比数列的前 n 项和:$S_n=\begin{cases}na_1, & q=1,\\ \dfrac{a_1-a_nq}{1-q}, & q\neq 1\end{cases}$	1. 根据例题演示用错位相减法求等比数列的前 n 项和,搭配讲解过程,学生仔细观看; 2. 教师出示另一个等比数列,让学生自主完成前 n 项和公式的推导过程
解析例题	教师在确定学生理解并掌握错位相减法的原理的基础上,出示其他例题,学生自主求解,教师巡视指导	1. 教师根据学生完成例题的情况进行讲解,解决学生在求和过程中遇到的问题; 2. 解决学生的问题后,教师再出示一道例题,学生自主解决,教师巡视指导
注意事项	1. 明确用错位相减法求和所得等比数列的前 n 项和公式,公比为 1 或不为 1 的情况; 2. 已知 a_1,q,a_n,n,S_n 中的任意三项,可以求其他三项(知三求二); 3. (补充)在学生熟练掌握错位相减法的基础上,简单介绍其他数列求和的方法:倒序相加法;裂项相消法;分组求和与并组求和……	1. 明确等比数列的前 n 项和公式,公比为 1 或不为 1 的情况; 2. 已知 a_1,q,a_n,n,S_n 中的任意三项,可以求其他三项(知三求二)。
课堂总结及练习	略	略

(1) 请对案例中两位教师的教学引入环节进行评析;

(2) 请对教师 B“新知学习”环节进行评析并给出改进建议。

六、教学设计题(本大题 1 小题,30 分)

17. "几何概型" 是高中阶段学生的必修内容,被安排在"古典概型" 内容之后学习。在现实生活中,常常会遇到试验的所有可能结果是无穷多的情况,这时就不能用"古典概型" 来解决了。在特定情形下,可以用"几何概型" 来解决此类问题。

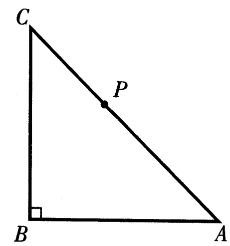
请完成下列任务:

(1) 请设计高中"几何概型" 这一内容的教学目标;

(2) 请结合教学目标,类比"古典概型" 设计"几何概型" 的主要教学过程;

(3) 设计下述习题的变式题(写出答案),并总结出求解几何概型问题的步骤。

习题:在等腰直角三角形 ABC 中,$\angle B = 90°$,在线段 AC 上任取一点 P,求 $AP < AB$ 的概率。



教师资格考试数学学科知识与教学能力(高级中学)标准预测试卷(七)

注意事项:

1. 考试时间为120分钟,满分为150分。
2. 请按规定在答题卡上填涂、作答。在试卷上作答无效,不予评分。

一、单项选择题(本大题共8小题,每小题5分,共40分)

1. 已知随机变量X的概率密度函数为$f(x)=\dfrac{e^{-x^2+2x-1}}{\sqrt{\pi}}$,则$D(X)=$(　　)。

A. 1　　B. $\dfrac{1}{2}$

C. $\dfrac{1}{3}$　　D. $\dfrac{1}{4}$

2. 设矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&a\\1&4&a^2\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}1\\d\\d^2\end{bmatrix}$,若集合$\Omega=\{1,2\}$,则线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$有无穷多解的充分必要条件为(　　)。

A. $a\notin\Omega,d\notin\Omega$　　B. $a\notin\Omega,d\in\Omega$

C. $a\in\Omega,d\notin\Omega$　　D. $a\in\Omega,d\in\Omega$

3. 曲线$x=t,y=t^2,z=t^3$在点$(1,1,1)$处的法平面方程是(　　)。

A. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{3}$　　B. $x+2y+3z-6=0$

C. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{1}$　　D. $x+y+z-3=0$

4. 曲线$y=\dfrac{1}{x(x-1)}+\ln(1+e^x)$有(　　)条渐近线。

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

5. 常数$\alpha>0$,则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1-\cos\dfrac{\alpha}{n}\right)$的敛散性为(　　)。

A. 发散　　B. 条件收敛

C. 绝对收敛　　D. 收敛性与α的取值有关

6. 设$\boldsymbol{A}$是$m\times n$矩阵,非齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$有解的充分条件是(　　)。

A. $r(\boldsymbol{A})=m$　　B. $\boldsymbol{A}$的行向量组线性相关

C. $r(\boldsymbol{A})=n$　　D. $\boldsymbol{A}$的列向量组线性相关

7. 关于三角形关系的描述,初中有“大角对大边”,高中有“正弦定理”,这个研究过程的思路主要表现为(　　)。

A. 从理论到实际　　B. 从一般到特殊

C. 从定性到定量　　D. 从有限到无限

8. 高中数学课程是义务教育阶段后普通高级中学的主要课程,具有(　　)。

A. 基础性、选择性和发展性　　B. 基础性、选择性和实践性

C. 基础性、实践性和创新性　　D. 基础性、选择性和普适性

二、简答题(本大题共 5 小题,每小题 7 分,共 35 分)

9. 设矩阵 $\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ x & y\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{N}=\begin{bmatrix}2 & 4\\ -1 & -1\end{bmatrix}$,若 $\boldsymbol{MN}=\begin{bmatrix}0 & 2\\ 5 & 13\end{bmatrix}$,求矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的逆矩阵 $\boldsymbol{M}^{-1}$。

10. 已知 $P(A)=P(B)=P(C)=\dfrac{1}{4}$,$P(AB)=0$,$P(AC)=P(BC)=\dfrac{1}{16}$,则 A,B,C 中至少发生一个的概率是多少？A,B,C 都不发生的概率是多少？

11. 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内可导。证明:在 (a,b) 内至少存在一点 ξ,使得 $\frac{bf(b)-af(a)}{b-a}=f(\xi)+\xi f'(\xi)$。

12. 以“余弦定理”的教学为例,简述数学定理教学的基本环节。

13. 简述高中数学课程的地位和作用。

三、解答题（本大题 1 小题，10 分）

14. 设 $A=\begin{bmatrix}1 & a & 0 & 0\\ 0 & 1 & a & 0\\ 0 & 0 & 1 & a\\ a & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$，$b=\begin{bmatrix}1\\ -1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$。

（1）计算行列式 $|A|$；

（2）当实数 a 为何值时，方程组 $Ax=b$ 有无穷多解，并求其通解。

四、论述题（本大题 1 小题，15 分）

15. 数据分析素养是课标要求培养的数学核心素养之一。

（1）请说明数据分析的内涵，并简述数据分析的基本过程；

（2）请在具体教学实践上说明如何培养学生的数据分析素养。

五、案例分析题（本大题 1 小题，20 分）

16. 案例：

在求解题目"已知双曲线的右准线为 $x=4$，右焦点 $F(10,0)$，离心率 $e=2$，求双曲线的方程"时，两位同学解题方法如下。

方法一：$x=\dfrac{a^2}{c}=4$，$c=10$，所以 $a^2=40$，$b^2=c^2-a^2=60$，故所求的双曲线方程为 $\dfrac{x^2}{40}-\dfrac{y^2}{40}=1$。

方法二：由焦点 $F(10,0)$ 知 $c=10$，所以 $e=\frac{c}{a}=2, a=5, b^2=c^2-a^2=75$。

故所求的双曲线方程为 $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{75}=1$。

问题：

（1）指出学生的错误之处；

（2）分析学生的错误原因；

（3）写出正确解法。

六、教学设计题（本大题 1 小题，30 分）

17. 通过直观感知、概括归纳出平面向量的基本定理：如果 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ 是同一平面内的两个不共线向量，那么对于这一平面内的任意向量 $\boldsymbol{a}$，有且只有一对实数 λ_1, λ_2，使 $\boldsymbol{a}=\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2$。

请完成下列任务：

（1）请设计一个探索该定理的教学过程，并说明设计意图；

（2）请设计一个习题（不必解答），帮助学生进一步巩固该定理，并说明设计意图；

（3）你认为平面向量的基本定理在高中数学课程中占有怎样的地位和作用？

教师资格考试数学学科知识与教学能力(高级中学)标准预测试卷(八)

注意事项：

1. 考试时间为 120 分钟,满分为 150 分。
2. 请按规定在答题卡上填涂、作答。在试卷上作答无效,不予评分。

一、单项选择题(本大题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分)

1. 设事件 A,B 及 $A\cup B$ 的概率分别是 0.4,0.3,0.6,则 $P(A\overline{B})=($　　$)$。

A. 0.1　　B. 0.3

C. 0.5　　D. 0.6

2. 下列数列收敛的是(　　)。

A. $\{(-1)^n\}$　　B. $\left\{\frac{1}{n+1}\right\}$

C. $\{n^2\}$　　D. $\left\{\frac{n^2+1}{2n}\right\}$

3. 极限 $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{2x}}$ 的值是(　　)。

A. $\frac{e}{2}$　　B. 2e

C. $\sqrt{e}$　　D. e

4. 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+2ax_2x_3$ 正定,则实数 a 的取值应满足(　　)。

A. $a>9$　　B. $-3<a<3$

C. $3\leqslant a\leqslant 9$　　D. $a\leqslant -3$

5. 设区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 4\}$,则 $\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y=($　　$)$。

A. 8π　　B. 2π

C. 16π　　D. 4π

6. 设三阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $1,2,-3$,则 $|\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}|$ 的值为(　　)。

A. 135　　B. 153

C. -6　　D. 0

7. 依据 $2^2-1=3,2^3-1=7,2^5-1=31,2^7-1=127$,得出结论:当 P 为素数(质数)时,2^P-1 也是素数。这里运用的是(　　)。

A. 归纳推理　　B. 类比推理

C. 演绎推理　　D. 合情推理同时也是演绎推理

8. 下列描述的四种教学场景中，使用的教学方法为演示法的是（　　）。

A. 课堂上老师运用实物直观教具将教学内容生动形象地展示给学生

B. 课堂上老师运用口头语言，辅以表情姿态向学生传授知识

C. 课堂上在老师的指导下，学生运用所学知识完成课后练习

D. 课堂上老师向学生提出问题，并要求学生回答，以对话方式探索新知识

二、简答题（本大题共 5 小题，每小题 7 分，共 35 分）

9. 在以 O 为原点的空间直角坐标系中，点 A,B,C 的坐标依次为 $(-2,1,4)$，$(-2,2,6)$，$(-1,3,3)$。

（1）求三角形 ABC 的面积；

（2）求四面体 $O-ABC$ 的体积。

10. 讨论 k 为何值时，线性方程组 $\begin{cases} x+y=1, \\ x+k^2y=k \end{cases}$ 无解，有唯一解，有无穷多解。当方程组有解时并求其解。

11. 设$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_4$为数域$P$上4维线性空间$V$的一个基，$V$的一个线性变换$\sigma$在这个基下的矩阵为$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 5 \\ 2 & -2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$，求$\sigma$的核$\sigma^{-1}(\mathbf{0})$与$\sigma$的秩。

12. 请以"等比数列"为例，简述数学课堂教学导入的两种方法。

13. 分别解释心理学中"同化"与"顺应"的含义，并举例说明"同化"在数学概念学习中的作用。

三、解答题(本大题 1 小题,10 分)

14. 设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 为三维单位列向量,且 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=0$,记 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$。

(1) 求证:$\boldsymbol{A}$ 可相似对角化;

(2) 若存在三维列向量 $\boldsymbol{r}\neq\boldsymbol{0}$,使 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{r}=\boldsymbol{0}$,记 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{r},2(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}),\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha})$,求 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$。

四、论述题(本大题 1 小题,15 分)

15. 类比思想是一种重要的数学思想,不仅可以在很多知识的理解与掌握上发挥作用,而且在解决很多实际问题时,这种数学思想的作用也能够很好地得到体现。请谈谈类比思想对数学学习有哪些帮助。

五、案例分析题(本大题1小题,20分)

16. 案例:

某学校高二年级数学备课组针对“随机事件的概率”,经过讨论,拟定了如下教学目标:

① 通过试验,形成对随机事件发生的可能性大小做定性分析的能力,了解影响随机事件发生的可能性大小的因素;

② 了解事件的种类,对事件发生的概率有初步认识。

为落实教学目标,针对“随机事件的概率” 一课,教师甲、乙分别提出了不同的引入方法。

【教师甲】

师:大家请看这个例子,一个袋子中有大小相同的5个球,其中有4个黄球,1个红球。从中任意摸取一球。请大家思考一下,摸出白球的可能性大小,摸出黄球的可能性大小;如果袋子中大小相同的球全部换成红色,则摸出红球的可能性大小。(学生讨论,师生互动)

师:袋子中没有白球,所以摸出白球的可能性为0,我们称此为不可能事件;摸出黄球的可能性比摸出白球的可能性大,但不能确定,摸出黄球可能发生也可能不发生,我们称此类事件为随机事件;如果袋中球全部为红色,那么必然摸出红球,不可能有其他情况,我们称此事件为必然事件。不可能事件和必然事件是可以确定其发生还是不发生的,所以统称为确定事件。

【教师乙】

师:同学们,想一想老师下面说的这几句话。“明天一定下雨”“北方冬天的气温是30摄氏度”“在地球上掷一个石块会下落”。(学生讨论,师生互动)

师:明天可能下雨也可能不下雨,即这件事可能发生也可能不发生,所以称此事件为随机事件;北方冬天的气温不可能为30摄氏度,所以这件事不可能发生,我们称此事件为不可能事件;由于地心引力,掷一个石块绝对会下落,所以这件事必然发生,我们称此事件为必然事件。不可能事件和必然事件是可以确定其发生还是不发生的,所以统称为确定事件。

问题:

(1) 对该备课组拟定的教学目标进行评析并给出你设计的教学目标;

(2) 分析甲、乙教师不同引入方式的优点和不足。

六、教学设计题(本大题 1 小题,30 分)

17. 针对“正弦定理”的教学,教师制定了如下的教学目标:

① 通过对任意三角形边长和角度关系的探索,掌握正弦定理的内容及其证明方法;

② 会用正弦定理解决与实际生活有关的问题。

依据这一教学目标,请完成下列任务:

(1) 设计一个探索正弦定理的教学片段,并说明设计意图;

(2) 设计一个习题(不必解答),以帮助学生理解该定理,并说明设计意图;

(3) 设计一个实例,体会正弦定理在生活中的应用,并说明设计意图。

教师资格考试数学学科知识与教学能力(高级中学)标准预测试卷(九)

注意事项：

1. 考试时间为 120 分钟，满分为 150 分。
2. 请按规定在答题卡上填涂、作答。在试卷上作答无效，不予评分。

一、单项选择题(本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分)

1. 设有 $\mathbf{R}^{2\times2}$ 的子空间 $W=\{\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{A}\in\mathbf{R}^{2\times2},\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{A}\}$，则 W 的维数是(　　)。

A. 1　　B. 2

C. 3　　D. 4

2. 设 $f(x)$ 为连续函数，且 $F(x)=\int_{\frac{1}{x}}^{\ln x}f(t)\,\mathrm{d}t$，则 $F'(x)=$(　　)。

A. $\frac{1}{x}f(\ln x)+\frac{1}{x^2}f\left(\frac{1}{x}\right)$　　B. $\frac{1}{x}f(\ln x)+f\left(\frac{1}{x}\right)$

C. $\frac{1}{x}f(\ln x)-\frac{1}{x^2}f\left(\frac{1}{x}\right)$　　D. $f(\ln x)-f\left(\frac{1}{x}\right)$

3. 对某目标进行100次独立射击，假设每次射击击中目标的概率是0.2，记 X 为100次独立射击击中目标的总次数，则 $E(X^2)$ 等于(　　)。

A. 20　　B. 200

C. 400　　D. 416

4. 设函数 $f(x)$ 满足 $f''(x)-5f'(x)+6f(x)=0$，若 $f(x_0)>0$，$f'(x_0)=0$，则(　　)。

A. $f(x)$ 在点 x_0 处取得极大值

B. $f(x)$ 在点 x_0 的某个领域内单调增加

C. $f(x)$ 在点 x_0 处取得极小值

D. $f(x)$ 在点 x_0 的某个领域内单调减少

5. 平面 $x-y+2z=8$ 与平面 $2x+y+z=10$ 的夹角是(　　)。

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{4}$

C. $\frac{\pi}{3}$　　D. $\frac{\pi}{2}$

6. 设 $\boldsymbol{A}$ 是秩为 $n-1$ 的 n 阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha}_1$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 是方程组 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的两个不同的解向量，则 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的通解必定是(　　)。

A. $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$　　B. $k\boldsymbol{\alpha}_1$

C. $k(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)$　　D. $k(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)$

7.“以学生发展为本”中“发展”的含义包括全体学生的发展、全面和谐的发展、终身持续的发展、个性特长的发展以及(　　)的发展。

A. 科学
B. 可持续性
C. 活泼主动
D. 身心健康

8. 证明通常分成直接法和间接法，下列证明方式属于间接法的是(　　)。

A. 分析法
B. 综合法
C. 反证法
D. 比较法

二、简答题(本大题共 5 小题，每小题 7 分，共 35 分)

9. 已知$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n+1}+ax+b}{x^{2n}+2}$是连续函数，求 a,b 的值。

10. 求通过直线$\begin{cases}2x+y-2z+1=0,\\x+2y-z-2=0,\end{cases}$且与平面 $x+y+z-1=0$ 垂直的平面方程。

11. 设三阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$ 有三个不同的特征值，且 $\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$。

（1）证明：$r(\boldsymbol{A})=2$；

（2）若 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，求方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解。

12. 简述向量在高中数学课程中的作用。

13. 简述实施合作学习应注意的几个问题。

三、解答题(本大题 1 小题,10 分)

14. 设 $f(x)$,$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,且 $g(x)$ 不变号。证明:至少存在一点 $\xi \in [a, b]$,使 $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$。

四、论述题(本大题 1 小题,15 分)

15.《普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订)》中提出,“人人都能获得良好的数学教育,不同的人在数学上得到不同的发展”。论述在数学教学中如何理解和实施这一教学理念。

五、案例分析题(本大题 1 小题,20 分)

16. 案例：
下面是学生小刘在解答一道题目时的解法。

已知实数 x 满足 $x^2+\frac{1}{x^2}+x+\frac{1}{x}=0$，那么，$x+\frac{1}{x}$ 的值为(　　)。

A. 1 或 -2　　　　B. -1 或 2
C. 1　　　　D. -2

【答案】A。解析：$x^2+\frac{1}{x^2}+x+\frac{1}{x}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2+x+\frac{1}{x}=0$，令 $x+\frac{1}{x}=t$，得关于 t 的一元二次方程 $t^2+t-2=0$，解得 $t=-2$ 或 $t=1$。所以 $x+\frac{1}{x}$ 的值为 -2 或 1。

问题：
(1) 请指出学生小刘的错误，并分析出现错误的原因；
(2) 写出正确的解析；
(3) 分析本题中运用的数学思想。

六、教学设计题(本大题1小题,30分)

17. 根据高中课程内容要求对“逻辑联结词”设定的教学目标如下：

① 理解逻辑联结词“或”“且”“非”的含义,了解“或”“且”“非”的复合命题的构成；

② 能熟练判断一些复合命题的真假性；

③ 通过逻辑联结词的学习,初步体会数学语言的严密性、准确性,并在今后数学学习和交流中能够准确运用逻辑联结词。

完成下列任务：

(1) 请设计一个情境以导入新知；

(2) 根据教学目标,设计至少两个实例进行教学,并说明设计意图；

(3) 本节课的教学难点是什么?

教师资格考试数学学科知识与教学能力（高级中学）标准预测试卷（十）

注意事项：

1. 考试时间为120分钟，满分为150分。
2. 请按规定在答题卡上填涂、作答。在试卷上作答无效，不予评分。

一、单项选择题（本大题共8小题，每小题5分，共40分）

1. 曲线$\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}=1(a>0,b>0)$和两坐标轴所围成的面积是（　　）。

A. $\frac{ab}{3}$　　B. $\frac{ab}{4}$

C. $\frac{ab}{5}$　　D. $\frac{ab}{6}$

2. 设直线$l:\begin{cases}x+3y+2z+1=0,\\2x-y-10z+3=0\end{cases}$及平面$\pi:2x+6y+4z-1=0$，则直线$l$（　　）。

A. 平行于平面π　　B. 在平面π上

C. 垂直于平面π　　D. 与平面π斜交

3. 极限$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right]=$（　　）。

A. $\frac{1}{\pi}$　　B. $\frac{2}{\pi}$

C. $\frac{3}{\pi}$　　D. $\frac{4}{\pi}$

4. 设矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，矩阵$\boldsymbol{B}$满足$\boldsymbol{ABA}^*=2\boldsymbol{BA}^*+\boldsymbol{E}$，其中$\boldsymbol{A}^*$为$\boldsymbol{A}$的伴随矩阵，$\boldsymbol{E}$是单位矩阵，则$|\boldsymbol{B}|=$（　　）。

A. $\frac{1}{10}$　　B. $\frac{1}{9}$

C. $\frac{1}{8}$　　D. $\frac{1}{7}$

5. 设随机变量X的分布列为$P(X=k)=\frac{kc}{N}$，$k=1,2,\cdots,N$，则$c=$（　　）。

A. $\frac{1}{N}$　　B. $\frac{1}{N+1}$

C. $\dfrac{2}{N}$

D. $\dfrac{2}{N+1}$

6. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\1 & 2 & 1\\1 & 1 & 2\end{bmatrix}$，且向量 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}1\\k\\1\end{bmatrix}$ 是 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征向量，则常数 $k=$（　　）。

A. 1

B. -2

C. -1

D. 1 或 -2

7. 提出"一笔画定理"的数学家是（　　）。

A. 高斯

B. 牛顿

C. 欧拉

D. 莱布尼兹

8. 对于函数的教学，以下说法不正确的是（　　）。

A. 对函数的学习不能停留在抽象的讨论，要突出函数图形的地位

B. 函数是最重要、最基本的数学模型，要加深对函数思想的理解与应用

C. 在学生头脑中留下几个具体的最基本的函数模型就可以了

D. 结合具体的数学内容采用多种模式，让学生经历函数知识的形成与应用过程

二、简答题（本大题共 5 小题，每小题 7 分，共 35 分）

9. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\cos x+b, & x<0,\\ a, & x=0,\\ \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}, & x>0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处连续，试确定常数 a,b 的值。

10. 设随机变量 X_1,X_2,X_3,X_4 相互独立，且有 $E(X_i)=i,D(X_i)=5-i,i=1,2,3,4$。设 $Y=2X_1-X_2+3X_3-\dfrac{1}{2}X_4$，求 $E(Y),D(Y)$。

11. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,-1,-2)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,-1,-1)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,0,1,-1)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\beta}_1=(2,5,-1,-5)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\beta}_2=(2,5,1,-5)^{\mathrm{T}}$,$W_1=L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$,$W_2=L(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)$($W_1,W_2$ 分别表示由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 生成的线性空间)。

(1) 求 $W_1\cap W_2$ 的维数;

(2) 求 $W_1\cap W_2$ 的一个基。

12. 合情推理包括归纳推理和类比推理,请举例说明归纳推理和类比推理在数学教学中的运用,并简述二者之间的关系。

13. 数学在形成人的理性思维、科学精神和促进个人智力发展的过程中发挥着不可替代的作用。数学素养是现代社会每一个人应该具备的基本素养。谈一谈在高中数学教学中如何提升学生的数学素养。

三、解答题(本大题1小题,10分)

14. 设直线 l_1 和 l_2 的方程分别为

$$l_1:\frac{x+2}{0}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+9}{8};l_2:\frac{x-1}{1}=\frac{y+6}{2}=\frac{z+4}{12}。$$

(1) 证明直线 l_1 与 l_2 异面;

(2) 求两直线之间的距离;

(3) 求与两直线距离相等的平面方程;

(4) 求与两直线都垂直相交的直线方程。

四、论述题(本大题1小题,15分)

15.《普通高中数学课程标准(2017年版2020年修订)》提出“提升学生应用数学解决实际问题的能力”,请结合教学实际谈谈如何提升学生的数学实际应用能力。

五、案例分析题(本大题 1 小题,20 分)

16. 案例:

某教师的例题解题课如下。

环节一:教师给出例题,已知椭圆 C 的左焦点 $F(-1,0)$,且点 $P\left(1,\frac{3}{2}\right)$ 在椭圆 C 上,求椭圆 C 的标准方程,接着教师让学生独立解答,教师站在讲台上观察。

环节二:教师请学生甲站起来说解题过程,同时板书学生甲的过程,并及时矫正,如图 1。

环节三:教师请学生乙站起来说解题过程,同时板书学生乙的过程,并及时矫正,如图 2。

> 解:设椭圆方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$,则 $\frac{1}{a^2}+\frac{9}{4b^2}=1$,
>
> $\because c=1,a^2-b^2=1$,解得 $a=2,b^2=3$,
>
> $\therefore$ 椭圆标准方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$

图 1

> 解:$\because 2a=PF_1+PF_2=\sqrt{4+\frac{9}{4}}+\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{5}{2}+\frac{3}{2}=4$
>
> $\therefore a=2,\because c=1,\therefore b^2=3$
>
> $\therefore$ 椭圆方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$

图 2

环节四:教师结合板书总结出关于求椭圆方程的两种方法,即待定系数法、定义法,并板书在黑板上。

环节五:学生做课堂练习,求与椭圆方程 $4x^2+9y^2=36$ 有相同焦点,且过 $(-3,2)$ 的椭圆标准方程。

随堂观察学生的课堂练习情况时发现一种现象:学生求解例题用哪种方法,课堂练习依然使用同种方法,说明案例中的教学并没有促进学生改进解题思路。

问题:

(1) 说明案例中这位教师在教学过程中哪些做法符合教学规律?

(2) 你认为这位教师还可以做哪些改进?

(3) 本节内容蕴含了哪些数学思想方法?

六、教学设计题(本大题 1 小题,30 分)

17. 高中“方程的根与函数的零点”(第一节课) 设定的教学目标如下：

① 通过对二次函数图像的描绘,了解函数零点的概念,领会函数零点与相应方程实数根之间的关系；

② 理解提出零点概念的作用,以及函数与方程的关系；

③ 通过对现实问题的分析,体会从函数的角度去思考方程的思想,掌握函数零点存在性的判断。

完成下列任务：

(1) 根据教学目标,设计一个问题引入,并说明设计意图；

(2) 根据教学目标 ①,设计问题链(至少包含三个问题),并说明设计意图；

(3) 确定本节课的教学重点；

(4) 作为高中阶段的基础内容,其难点是什么?

(5) 本节课的教学内容对后续哪些内容的学习有直接影响?